LP 問題のベクトル解法について

妹 尾 泰 弘・成 久 洋 之*

岡山理科大学大学院工学研究科修士課程電子工学専攻

*岡山理科大学工学部情報工学科

（1994年9月30日　受理）

1．まえがき

スーパー・コンピュータの出現により，並列計算アルゴリズムの研究が各数値計算分野で活発に行われている。現在，線形計画問題（以下，LP 問題と呼ぶ）に対する解法としては単体法が広く普及しているが，従来の単体法は逐次計算を主体としたものであり，ベクトル化率は零であることから，スーパー・コンピュータ用のアルゴリズムとして通用しない。

一般に，並列計算アルゴリズムの生成は，

(1) 逐次計算アルゴリズムを修正して，並列処理に利用する

(2) 新規に並列計算アルゴリズムを作成する

の，二通りのアプローチが考えられるが，これまでに開発された逐次計算用アルゴリズムを急に並列計算用に転換する事は，必ずしも容易ではない。

LP 問題に関しては，単体法が広く普及していることから(1)の方法が望ましい。しかし，そのベクトル化の可能性を考慮すると，現状では限定された分野の問題にしか適用出来ない様である。

本研究では，上記の観点から LP 問題の並列計算について検討するものである。

2．単体法に準拠した並列化

LP 問題は一般に次のように表される。

$$\begin{aligned} &\text{minimize} && cx \\ &\text{subject to} && Ax \geqq b, \quad x \geqq 0 \end{aligned} \tag{1}$$

(1)の問題が次のように構造化された問題を考えよう。

$$\begin{aligned} &\text{minimize} && \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ &\text{subject to} && B_j x_j \geqq b_j, \quad x_j \geqq 0, \quad \sum_{j=1}^{n} A_j x_j \geqq b \end{aligned} \tag{2}$$

ここで，B_j は $m_j \times n_j$ 行列，b_j は m_j 次元ベクトル，A_j は $m \times n_j$ 行列，b は m 次元ベクトル，c_j は n_j 次元ベクトルとする。

(2)の問題は，図１のように(1)の行列 A が block-diagonal に構造化され，しかも，(2)の最下位の条件式により各ブロックが結合された LP 問題を構成している。このような特殊構造を持った問題に対しては，Dantzig and Wolfe が1960年代に分解原理を提案し，(2)の問題を

$$
\begin{aligned}
&\text{minimize} && c_j x_j \\
&\text{subject to} && B_j x_j \geqq b_j, \quad x_j \geqq 0
\end{aligned}
$$

を j グループの部分問題として解き，その端点集合 $\{x_j{}^l\}$ を求め，

$$
\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{n} A_j\Bigl(\sum_{k=1}^{k_j} s_j{}^k x_j{}^{lk}\Bigr) \geqq b \\
&\sum_{k=1}^{k_j} s_j{}^k = 1 \quad (j=1,\ 2,\ \dots,\ n) \\
&s_j{}^k \geqq 0
\end{aligned}
\tag{4}
$$

を全体問題として各部分問題の解を修正し，最終的に(4)の条件式が満たされれば，(2)で与えられた問題の最適解となる，とするものである。ここで，

$$\sum s_j{}^k x_j{}^{lk}$$

は，端点 $x_j{}^{lk}$ $(k=1,\ 2,\ \dots,\ k_j)$ を用いて，(3)の

$$B_j x_j \geqq b_j$$

を満足する任意の x_j を表したものである。

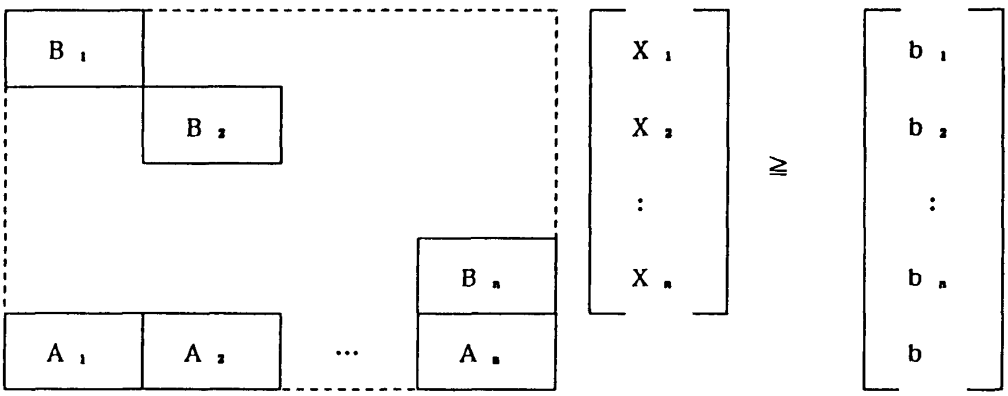


図１　式(2)の制約式の構造

この Dantzig and Wolfe の分解原理を用いると，(3)の各部分問題が各 j について独立処理できるようになり，並列処理が可能となる。つまり，LP 問題(1)の行列 A が構造化されている場合には並列計算ができることを示している。

3．線形相補性問題の並列化

凸 2 次計画問題（Convex Quadratic Programming Problems）は，次のように与えられる。

$$
\begin{aligned}
&\text{minimize} \quad && \frac{1}{2}x^T Dx + c^T x \\
&\text{subject to} \quad && Ax \geqq b, \quad x \geqq 0
\end{aligned}
\tag{5}
$$

ただし，A は $m \times n$ 行列，D は n 次の対象行列，c は n 次元ベクトル，b は m 次元ベクトルとする。

この問題の解が最適解を持つ条件は，Kuhn-Tucker の定理より，

$$
\begin{aligned}
&Ax \geqq b \\
&u^T(Ax-b)=0 \\
&Dx+c-A^T u \geqq 0 \\
&x \geqq 0, \quad u \geqq 0
\end{aligned}
\tag{6}
$$

として与えられる。ここで，z，q，M を

$$
M=\begin{bmatrix} D & -A^T \\ A & 0 \end{bmatrix}, \quad z=\begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix}, \quad q=\begin{bmatrix} c \\ -b \end{bmatrix}
$$

と定義すると，(6)は次のようにまとめることができる。

$$
\begin{aligned}
&Mz+q \geqq 0 \\
&z^T(Mz+q)=0 \\
&z \geqq 0
\end{aligned}
\tag{7}
$$

つまり，(5)の問題を解くことは(7)を満足する非負の z を求めることと同値である。この問題は線形相補性問題(Linear Complementary Problems, LCP)と呼ばれている。この LCP 問題は，

$$
Mz+q \geqq 0 \tag{8}
$$

の解を z 空間に投影し，(7)式が成立するような解を求めている事に等しい。

(8)の問題は，パラメータ ω を用い，

$$z=(z-\omega(Mz+q)),\quad \omega>0 \tag{9}$$

の形で反復法により解くことができる。ここで，$\mathrm{M}=(m_{ij})$ とすると

$$z_i^{(k+1)}=z_i^{(k)}-\omega m_{ii}^{-1}\Bigl(q_i+\sum_{j<i}m_{ij}z_i^{(k+1)}+\sum_{j\geqq i}m_{ij}z_j^{(k)}\Bigr),\ \forall i\in I \tag{10}$$

ただし，I は適当な次元の添字集合とする。このとき，$\omega=1$ では Gauss-Seidel 法であり，一般に(10)式での方法は逐次緩和法 (SOR 法) と呼ばれている。したがって，(7)の LCP 問題を SOR 法で解く場合には，

$$z_i^{(k+1)}=\Bigl[z_i^{(k)}-\omega m_{ii}^{-1}(q_i+\sum_{j<i}m_{ij}z_i^{(k+1)}+\sum_{j\geqq i}m_{ij}z_j^{(k)})\Bigr]_+,\ \forall i\in I \tag{11}$$

で求められる点列 $\{z^{(k)}\}$ を生成すればよい。ただし，$[a]_+$ は，$\max\{0,a\}$ であり，z を $\{z \mid z\geqq 0\}$ で与えられる非負象限に射影したことを意味している。したがって，射影 SOR 法は(9)の代わりに

$$z=(z-\omega(Mz+q))_+,\quad \omega>0 \tag{12}$$

を満足する z を反復法で求めることに等しい。

以上の事柄から 2 次計画問題(5)は LCP 問題(7)に変換され，(7)は反復法で解けるので，(11)式の形式で並列化が可能になる。

(1)の LP 問題は(5)における $D=0$ の場合に等しいので，

$$M=\begin{bmatrix}0 & -A^T\\ A & 0\end{bmatrix},\quad z=\begin{bmatrix}x\\ u\end{bmatrix},\quad q=\begin{bmatrix}c\\ -b\end{bmatrix}$$

となり，

$$\begin{aligned}&Mz+q\geqq 0\\ &z^Tq\leqq 0\\ &z\geqq 0\end{aligned} \tag{13}$$

の問題と等価である。ところが，この解は多数存在するので，特定の解を求める為に，

$$\text{minimize}\quad \frac{1}{2}z^Tz$$

$$\text{subject to}\quad Mz+q \geqq 0,\quad -z^Tq \geqq 0,\quad z \geqq 0 \tag{14}$$

で与えられる問題を考えよう。この双対問題は

$$\begin{aligned}&\text{maximum}\quad \frac{1}{2}z^Tz-s^T(Mz+q)-t^Tz+\beta q^Tz\\&\text{subject to}\quad z^T-s^TM-t^T+\beta q^T=0,\quad s\geqq 0,\quad t\geqq 0,\quad \beta\geqq 0\end{aligned} \tag{15}$$

となる。

$$z=M^Ts+t-\beta q$$

であるから

$$z^Tz-s^TMz-t^Tz+\beta q^Tz=0$$

が成立し，(15)の目的関数は

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}z^Tz-s^Tq-s^TMz-t^Tz+\beta q^Tz\\&\quad=\frac{1}{2}z^Tz-s^Tq-z^Tz=-\frac{1}{2}z^Tz-s^Tq\end{aligned}$$

したがって，(14)の双対問題は

$$\begin{aligned}&\text{minimize}\quad \frac{1}{2}z^Tz+s^Tq\\&\text{subject to}\quad z=M^Ts+t-\beta q,\quad s\geqq 0,\quad t\geqq 0,\quad \beta\geqq 0\end{aligned}$$

で与えられる。

ところが，この問題は(5)と全く同じタイプの問題であり，(12)で与えられる反復法で解けるはずである。すなわち，(15)の目的関数は

$$\frac{1}{2}z^Tz+s^Tq=\frac{1}{2}\|M^Ts+t-\beta q\|^2+s^Tq$$

として表されるので

$$\begin{aligned}&s=(s-\omega((M^Ts+t-\beta q)+q))_+\\&t=(t-\omega(M^Ts+t-\beta q))_+\\&\beta=(\beta-\omega(M^Ts+t-\beta q))_+\\&\omega>0\end{aligned} \tag{16}$$

に従った手法で求めることができる。

LP 問題は(1)で与えられる訳だが，これは次の 2 次計画問題と等価である。

$$\begin{aligned}&\text{minimize} && cx+\frac{\varepsilon}{2}x^Tx\\ &\text{subject to} && Ax\geqq b,\quad x\geqq 0\\ & && \text{for any.}\quad \varepsilon\in[0,\ \bar{\varepsilon}],\quad \bar{\varepsilon}>0\end{aligned} \tag{17}$$

ただし，ε は十分小さい正の実数とする。

この問題の双対問題は次のように変換される。

$$\begin{aligned}&\text{maximum} && cx+\frac{\varepsilon}{2}x^Tx+u^T(b-Ax)-v^Tx\\ &\text{subject to} && c+\varepsilon x^T-u^TA-v^T=0,\quad v\geqq 0,\quad u\geqq 0\end{aligned} \tag{18}$$

この条件式での転置を考えると

$$c^T+\varepsilon x-A^Tu-v=0$$

であるから，

$$c^Tx^T+\varepsilon xx^T-A^Tux^T-vx^T=0$$

となり，これを(18)の目的関数に代入すると

$$\frac{\varepsilon}{2}x^Tx+u^Tb-\varepsilon x^Tx=-\frac{\varepsilon}{2}x^Tx+u^Tb=\frac{\varepsilon}{2}x^Tx-u^Tb$$

したがって，(17)の双対問題は

$$\begin{aligned}&\text{minimize} && \frac{\varepsilon}{2}x^Tx-u^Tb\\ &\text{subject to} && \varepsilon x=A^Tu+v-c^T,\quad x\geqq 0,\quad u\geqq 0,\quad v\geqq 0\end{aligned}$$

として表される。これは，これまでの考え方より

$$\text{minimize}\quad \frac{1}{\varepsilon}\{\frac{1}{2}\|A^Tu+v-c^T\|^2-\varepsilon u^Tb\},\quad u\geqq 0,\quad v\geqq 0 \tag{19}$$

と同値である LCP 問題の条件式を満足すればよい。したがって，その反復法では，

$$\begin{aligned}&u=(u-\omega(A(A^Tu+v-c^T)-\varepsilon b)_+\\ &v=(v-\omega(A^Tu+v-c^T))_+\\ &\omega>0\end{aligned} \tag{20}$$

を求めればよい。

4．結果及び考察

単体法で LP 問題を解く場合，構造化された特殊問題以外では並列化は不可能である。反復法で解く場合には，反復回数が非常に多く，収束性が問題となる。これは，緩和係数 ω の値の決定法に依存する。

A 行列が $m\times n$ のものを，単体法で解く場合の平均解法時間 TP_{smp} と，反復法を用いた1反復あたりの解法時間 TP_{rep} は次のように表される。

$$TP_{smp}=\frac{n+m}{2}\left[2m(n+m)+m+\frac{1}{k}\{m(n+m)+2m\}\right]d$$

$$TP_{rep}=\left[m(nm+2n)+nm+n+\frac{1}{k}\{m(nm+2n)+3nm+4n\}\right]d$$

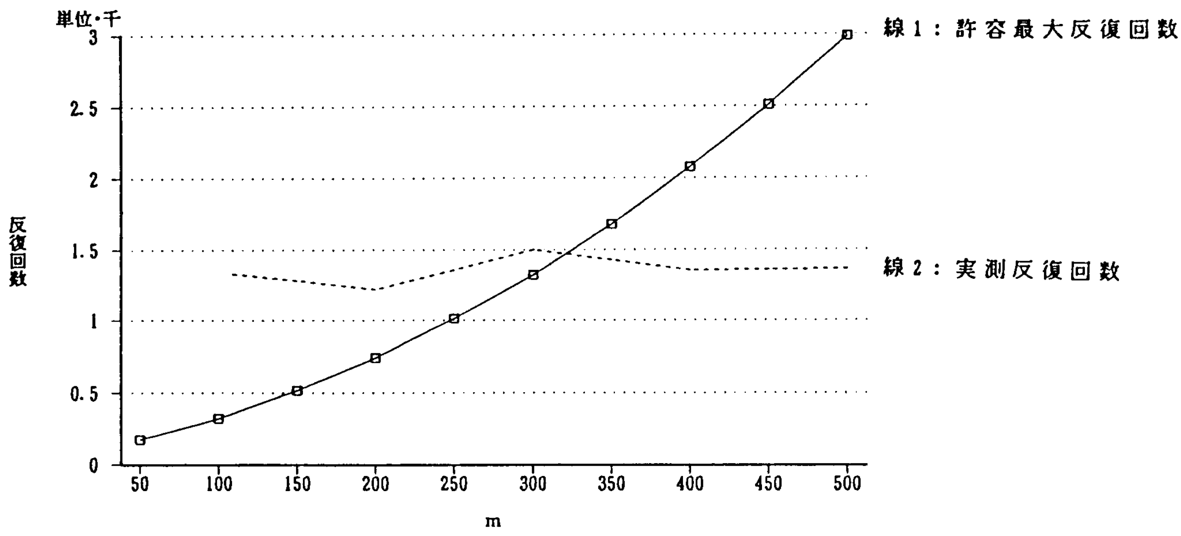
ここで，d は乗除演算時間，k は加減算に対する乗除の演算時間比率で，加減演算時間を d/k で表す。

並列化できる部分が全てプロセッサ利用出来るものとして解く場合，上記のような条件下では，

$$TP_{smp}\geqq\frac{TP_{rep}}{m+n}\times(\text{反復回数})$$

の時，単体法に比べ反復法の利用が有効である。

$n=100$，$d=1$，$k=2$ の状況下で，m を50から500まで増加させた場合の⑿式が成り立つ許容最大反復回数，グラフの線1の様になる。



許容最大反復回数と実測反復回数

式(20)に基づいた反復法プログラムの実測反復回数はグラフの線2の様になる。今回は収束条件を緩やかなものにした為，反復回数は比較的少なくなっている。正確な値を求めるには，この10倍以上の反復回数を必要とする。

しかし，今回の結果によるグラフは，行列 A の大きさによって大きく左右されず，行列の大きさ，ω，ε 値の取り方によっては，許容反復回数以下で結果を出すことができる事を意味している。

今後の課題としては，係数の操作を傾斜法を用いる等を行い，収束を加速させる方法を検討する予定である。

参考文献

1）関根泰次著「数理計画法」，岩波書店（1985）
2）刀根　薫著「数理計画」，朝倉書店（1986）

Parallel Methods for the Linear Problem

Yasuhiro SENOO and Hiroyuki NARIHISA*
Graduate School of Engineering,
**Faculty of Engineering,*
Okayama University of Science,
Ridai-cho 1-1, Okayama 700, Japan
(Received September 30, 1994)

The parallel algorithms are positively studied in each fields of numerical calculation, since the super computer is developed.

In general, the parallel algorithms are made by the following two methods.

(1) The method of modified sequential algorithm.

(2) The method which is developed for parallel algorithm.

In view point of conventional software resources, it is the most convenient if we can construct the parallel algorithm only by a little modification of the sequential algorithm. However, it is known that above mentioned (1) method can not apply for LP algorithm.

In this paper, we present the possibility of parallel calculation for the LP problem.